Algebra

Lezione 2

20 settembre 2016

prof. Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Altra lettura consigliata: Robbiano “Algebra lineare per tutti ”

http://www.springer.com/us/book/9788847004467

Scarti successivi

Se, invece, A è linearmente dipendente si procede con una tecnica detta degli degli scarti successivi: poichè A contiene per ipotesi almeno un vettore non nullo, non è restrittivo supporre che questo vettore sia $\mathbf{a}_1$.

Scarti successivi

Se, invece, A è linearmente dipendente si procede con una tecnica detta degli degli scarti successivi: poichè A contiene per ipotesi almeno un vettore non nullo, non è restrittivo supporre che questo vettore sia $\mathbf{a}_1$.

L'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ È quindi un sottoinsieme di A linearmente indipendente. Si considera poi l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, se questo insieme risulta linearmente dipendente si scarta il vettore $\mathbf{a}_2$ e si costruisce l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$

Scarti successivi

Se, invece, A è linearmente dipendente si procede con una tecnica detta degli degli scarti successivi: poichè A contiene per ipotesi almeno un vettore non nullo, non è restrittivo supporre che questo vettore sia $\mathbf{a}_1$.

L'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ È quindi un sottoinsieme di A linearmente indipendente. Si considera poi l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, se questo insieme risulta linearmente dipendente si scarta il vettore $\mathbf{a}_2$ e si costruisce l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$

Se invece $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è indipendente si aggiunge $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ e così via. Dal momento che l'insieme A contiene un numero finito di elementi, il procedimento descritto ha certamente termine in un numero finito di passi e conduce ad un sottoinsieme linearmente indipendente massimale per costruzione.

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:

$$A = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 0),\ \mathbf{a}_2 = (0, -1, 2, 1),\ \mathbf{a}_3 = (0, 0, 0, 0), \mathbf{a}_4 = (1, -1, 3, 1),\ \mathbf{a}_5 = (1, 0, 0, 0)\}$$

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:

$$A = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{a}_2 = (0,-1,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (0,0,0,0), \mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1),\ \mathbf{a}_5 = (1,0,0,0)\}$$

L'insieme A è linearmente dipendente perché contiene il vettore nullo; per determinare un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale si applica la tecnica degli scarti successivi: l'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ è linearmente indipendente, l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è indipendente, perché i due vettori non sono proporzionali;

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:

$$A = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{a}_2 = (0,-1,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (0,0,0,0), \mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1),\ \mathbf{a}_5 = (1,0,0,0)\}$$

L'insieme A è linearmente dipendente perché contiene il vettore nullo; per determinare un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale si applica la tecnica degli scarti successivi: l'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ è linearmente indipendente, l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è indipendente, perché i due vettori non sono proporzionali; l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ è ovviamente dipendente. Si ricomincia allora con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ che risulta dipendente perché $\mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:

$$A = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{a}_2 = (0,-1,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (0,0,0,0), \mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1),\ \mathbf{a}_5 = (1,0,0,0)\}$$

L'insieme A è linearmente dipendente perché contiene il vettore nullo; per determinare un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale si applica la tecnica degli scarti successivi: l'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ è linearmente indipendente, l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è indipendente, perché i due vettori non sono proporzionali; l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ è ovviamente dipendente. Si ricomincia allora con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ che risulta dipendente perché $\mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ finalmente l'insieme $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ è linearmente indipendente e risulta quindi massimale rispetto alla proprietà di indipendenza

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:

$$A = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{a}_2 = (0,-1,2,1),\ \mathbf{a}_3 = (0,0,0,0), \mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1),\ \mathbf{a}_5 = (1,0,0,0)\}$$

L'insieme A è linearmente dipendente perché contiene il vettore nullo; per determinare un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale si applica la tecnica degli scarti successivi: l'insieme $\{\mathbf{a}_1\}$ è linearmente indipendente, l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è indipendente, perché i due vettori non sono proporzionali; l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ è ovviamente dipendente. Si ricomincia allora con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ che risulta dipendente perché $\mathbf{a}_4 = (1,-1,3,1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ finalmente l'insieme $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ è linearmente indipendente e risulta quindi massimale rispetto alla proprietà di indipendenza

Partendo da un vettore di A diverso da $\{\mathbf{a}_1\}$ si ottiene ovviamente un sottoinsieme indipendente massimale diverso da B, ad esempio $C = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ che, vale la pena notare fin d'ora, ha la stessa cardinalità di B.

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si cerca un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale dell'insieme:
$\mathbf{S} = \operatorname{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}) \subseteq \mathbb{R}^4$ con

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 0),\ \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, -1),\ \mathbf{a}_3 = (1, -3, 1, 2),\ \mathbf{a}_4 = (1, 1, 1, -2)$$

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ contiene sottoinsiemi che, rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione scalare definite in $\mathbb{R}^n$, presentano il medesimo comportamento algebrico di $\mathbb{R}^n$; questi sottoinsiemi sono anche essi spazi vettoriali sul campo reale e, gerarchicamente, sono detti **sottospazi** dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$; si suppone che S sia **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare; questo significa che valgono contemporaneamente le proprietà:

Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$; si suppone che S sia **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare; questo significa che valgono contemporaneamente le proprietà:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}$

Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$; si suppone che S sia **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare; questo significa che valgono contemporaneamente le proprietà:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in S \Longrightarrow \alpha\mathbf{v} \in \mathbf{S}$

Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$; si suppone che S sia **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare; questo significa che valgono contemporaneamente le proprietà:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}$
- $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} \in S \Longrightarrow \alpha\mathbf{v} \in \mathbf{S}$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$; si suppone che S sia **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione scalare; questo significa che valgono contemporaneamente le proprietà:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in S \Longrightarrow \alpha\mathbf{v} \in \mathbf{S}$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione scalare ristrette all'insieme S sono ben definite e soddisfano tutte le proprietà elencate a proposito di $\mathbb{R}^n$: infatti , se $\mathbf{v} \in S$ anche $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \in S$. Inoltre $\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$ appartiene ad S. Le proprietà associativa e commutativa dell'addizione valgono in tutto $\mathbb{R}^n$ e a maggior ragione valgono per gli elementi di $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e così le proprietà della moltiplicazione scalare. L'insieme S ha quindi la stessa struttura algebrica di $\mathbb{R}^n$; è naturale chiamare anche S spazio vettoriale sul campo dei reali, **sottospazio** dello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$.

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dal solo vettore nullo, $\{\mathbf{0}\}$, è un sottospazio detto ovviamente sottospazio **nullo**, così come lo è l'insieme $\mathbb{R}^n$ stesso.
Questi due sottospazi sono i sottospazi **impropri** dello spazio $\mathbb{R}^n$

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dal solo vettore nullo, $\{\mathbf{0}\}$, è un sottospazio detto ovviamente sottospazio **nullo**, così come lo è l'insieme $\mathbb{R}^n$ stesso.
Questi due sottospazi sono i sottospazi **impropri** dello spazio $\mathbb{R}^n$

Spazio generato da un insieme finito di vettori

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si considera un insieme finito di vettori:

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$$

e, a partire da questo, si costruisce un nuovo sottoinsieme formato da tutti i vettori che sono combinazioni lineari dei vettori di A:

$$\mathrm{span}(A) = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, r\}$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dal solo vettore nullo, $\{\mathbf{0}\}$, è un sottospazio detto ovviamente sottospazio **nullo**, così come lo è l'insieme $\mathbb{R}^n$ stesso.
Questi due sottospazi sono i sottospazi **impropri** dello spazio $\mathbb{R}^n$

Spazio generato da un insieme finito di vettori

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si considera un insieme finito di vettori:

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$$

e, a partire da questo, si costruisce un nuovo sottoinsieme formato da tutti i vettori che sono combinazioni lineari dei vettori di A:

$$\text{span}(A) = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, r\}$$

L'insieme $\text{span}(A)$ è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione scalare in $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathrm{span}(A)$ è quindi un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, si indica come **sottospazio generato dall'insieme** A mentre l'insieme A è un **sistema di generatori** per $\mathrm{span}(A)$.

L'insieme $\text{span}(A)$ è quindi un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, si indica come **sottospazio generato dall'insieme** A mentre l'insieme A è un **sistema di generatori** per $\text{span}(A)$.

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ l'insieme $A = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)\}$ genera il sottospazio

$$\text{span}(A) = \{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = (\lambda_1, \lambda_2, 0), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ l'insieme $B = \{\mathbf{v} = (1, -1)\}$ genera lo spazio :

$$\mathrm{span}(B) = \{\lambda \mathbf{v} = (\lambda, -\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

formato da tutti i vettori proporzionali al vettore $\mathbf{v}$. Un modello geometrico del sottospazio $\mathrm{span}(B)$ È l'insieme dei vettori (applicati nell'origine di un riferimento cartesiano nel piano) che stanno sulla retta di equazione $y = -x$.

Lo spazio nullo $\mathbf{O} = \{0\}$ è generato dall'insieme che contiene il solo vettore nullo.

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ stesso può essere visto come spazio generato da un insieme finito di vettori, ad esempio dall'insieme già piú volte incontrato:

$$E = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Infatti, come già visto:

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Vale la pena riflettere su quest'ultima proprietà di $\mathbb{R}^n$: lo spazio $\mathbb{R}^n$ ha cardinalità non finita (cioè contiene infiniti elementi), ma si può costruire utilizzando un numero **finito** di vettori e il campo $\mathbb{R}$ degli scalari.

Questa notevole proprietà si esprime dicendo che $\mathbb{R}^n$ è **finitamente generato**.

Da questa proprietà segue inoltre che ogni sottospazio $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ risulta finitamente generato, cioè i vettori di S possono essere espressi come combinazioni lineari di un numero finito di vettori.

In altre parole, per ogni sottospazio S esiste un sistema finito di generatori, cioè un insieme A tale che:

$$\mathrm{S} = \ \mathrm{span}(A)$$

Basi e dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Sia $\mathbf{S}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$$

un suo sistema di generatori.

Basi e dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Sia $\mathbf{S}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$$

un suo sistema di generatori.

Ha senso chiedersi se tutti i vettori di A siano essenziali per la costruzione di $\text{span}(A)$

Basi e dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Sia $\mathbf{S}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$$

un suo sistema di generatori.

Ha senso chiedersi se tutti i vettori di A siano essenziali per la costruzione di $\mathrm{span}(A)$

Esempio

Nello spazio $\mathbb{R}^2$ l' insieme $A = \{\mathbf{a}_1 = (1, -2), \mathbf{a}_2 = (2, -4)\}$ genera il sottospazio

$$\mathrm{span}(A) = \{(\lambda, -2\lambda) = \lambda(1, -2); \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}(B).$$

Il sottospazio $\text{span}(A)$ può pertanto essere generato anche da un solo vettore; il sistema iniziale di generatori è ridondante. Si noti che l'insieme A è linearmente dipendente e $B = \{\mathbf{a}_1\}$ è un sottoinsieme di A linearmente indipendente massimale.

Esempio

Lo spazio $\mathbb{R}^3$ è generato da

$$E = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\},$$

insieme linearmente indipendente.
L' insieme E non è ridondante; se si esclude anche un solo generatore, ad esempio, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, l' insieme

$$E' = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\}$$

genera il sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{span}(E') = \{\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \alpha(0,1,0) + \beta(0,1,0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}) = \{(\alpha, \beta, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

che non coincide con $\mathbb{R}^3$, visto che non contiene $\mathbf{e}_3$ nè alcun vettore a questo parallelo.

Teorema 1

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\} \subset \mathbb{R}^n$, e sia B un sottoinsieme linearmente indipendente massimale di A. Allora A e B generano lo stesso sottospazio, in altre parole:

$$\mathbf{span}(A) = \mathbf{span}(B).$$

Teorema 1

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\} \subset \mathbb{R}^n$, e sia B un sottoinsieme linearmente indipendente massimale di A. Allora A e B generano lo stesso sottospazio, in altre parole:

$$\mathbf{span}(A) = \mathbf{span}(B).$$

Il teorema 1 afferma in sostanza che ogni sottospazio $\mathbf{S}$ (diverso dallo spazio nullo) può sempre essere generato da un insieme linearmente indipendente.

Vediamo ad esempio, la dimostrazione in un caso particolare $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ e $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente massimale di A, il vettore $\mathbf{a}_3$ risulta combinazione lineare di $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{a}_3 = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$$

Vediamo ad esempio, la dimostrazione in un caso particolare $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ e $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente massimale di A, il vettore $\mathbf{a}_3$ risulta combinazione lineare di $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{a}_3 = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$$

Allora:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 (\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2) = (\lambda_1 + \alpha \lambda_3) \mathbf{a}_1 + (\lambda_2 + \beta \lambda_3) \mathbf{a}_2.$$

Definizione

Sia $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio non nullo di $\mathbb{R}^n$. Si definisce **base** di $\mathbf{S}$ ogni insieme finito B tale che:

1. B è un sistema di generatori di $\mathbf{S}$: $\quad \mathbf{S} = \mathrm{span}(B)$
2. B è un insieme linearmente indipendente in $\mathbb{R}^n$.

Definizione

Sia $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio non nullo di $\mathbb{R}^n$. Si definisce **base** di $\mathbf{S}$ ogni insieme finito B tale che:

1. B è un sistema di generatori di $\mathbf{S}$: $\quad \mathbf{S} = \mathrm{span}(B)$
2. B è un insieme linearmente indipendente in $\mathbb{R}^n$.

ogni sottospazio non nullo $\mathbf{S}$ di $\mathbb{R}^n$ (compreso lo stesso $\mathbb{R}^n$) ammette sempre una base.

Esempio L'insieme

$$E = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$$

è un sistema di generatori dello spazio $\mathbb{R}^n$ ed è linearmente indipendente, costituisce pertanto una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, indicata come **base canonica** o **base standard** di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si vuole esaminare se l' insieme

$$H = \{\mathbf{S}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{S}_2 = (-1, 0, 1), \mathbf{S}_3 = (2, 3, 0)\}$$

costituisca una base di $\mathbb{R}^3$